فصل اول تابع تبدیل و فضای حالت

بخش اول تابع تبدیل

مطالبی که در این بخش می‌آموزیم:

۱ تعریف سیستم و هدف کنترل آن.

۲ بیان یا مدل ریاضی یک سیستم و معرفی انواع سیستم‌ها.

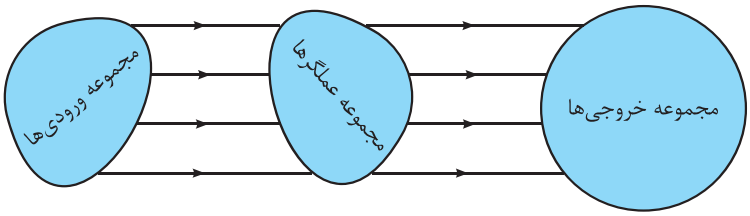
۳ معرفی سیستم‌های مورد مطالعه در این کتاب و بیان ویژگی‌های آن‌ها.

۴ روش‌های نمایش یک سیستم خطی.

۵ معرفی تابع تبدیل سیستم و روش‌های محاسبه آن از جمله روش میسون.

تعریف سیستم

یک سیستم مجموعه اجزایی هستند که هدف یا اهداف مشخصی را دنبال می‌کنند. مهم‌ترین اجزاء یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است.

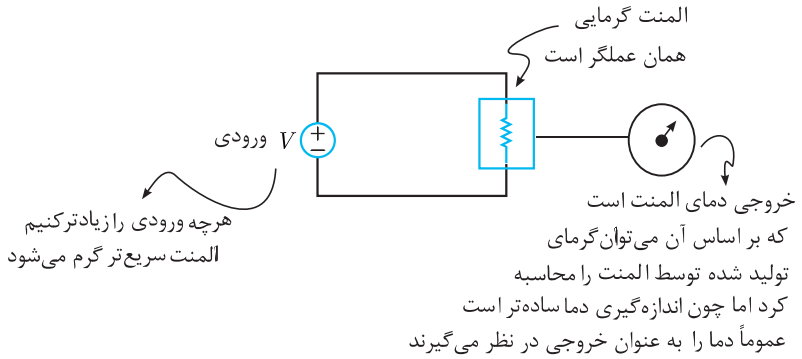


عموماً در سیستم‌های کنترل، قسمت‌هایی از سیستم که تغییرات آن در اختیار کاربر است را به عنوان ورودی در نظر می‌گیرند. مثلاً در موتور احتراقی میزان سوخت و هوا یک ورودی است که کاربر با فشار دادن پدال گاز

آن را افزایش می‌دهد.

عملیات داخلی سیستم توسط مجموعه عملگرها انجام می‌شود که عموماً منجر به خروجی مورد نظر می‌شوند و در سیستم‌های یک ورودی و یک خروجی می‌توان گفت عملیاتی است که سیستم روی ورودی انجام می‌دهد تا خروجی هدف را تولید کند و عموماً خروجی را متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری‌اند در نظر می‌گیرند.

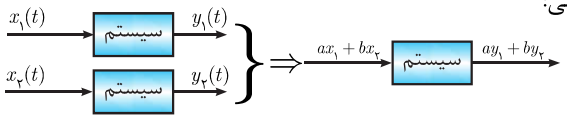
مثال ساده زیر موضوع را نشان می‌دهد.



در این درس تنها به سیستم‌هایی مطابق شکل زیر

که شامل ویژگی‌های زیر باشند، می‌پردازیم:

۱ از ۴ سیستم خطی است (Linear system): سیستمی خطی است که خاصیت همگنی و جمع‌پذیری را دارد. یعنی:



مثال ۱

$$y = x^2 + x \Rightarrow \text{غیرخطی است}$$

زیرا

$$(ax_1 + bx_2)^2 + (ax_1 + bx_2) \neq a(x_1^2 + x_1) + b(x_2^2 + x_2)$$

$$y = 3x \Rightarrow \text{خطی است}$$

زیرا

$$3(ax_1 + bx_2) = a(3x_1) + b(3x_2) = ay_1 + by_2$$

۲ از ۴ سیستم تغییر ناپذیر با زمان است (time invariant system): مدل سیستم (معادلات

دیفرانسیل حاکم بر سیستم) با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

$\dot{x} = ax + b \quad \longleftarrow$ معادله دیفرانسیل با زمان تغییر نمی‌کند.

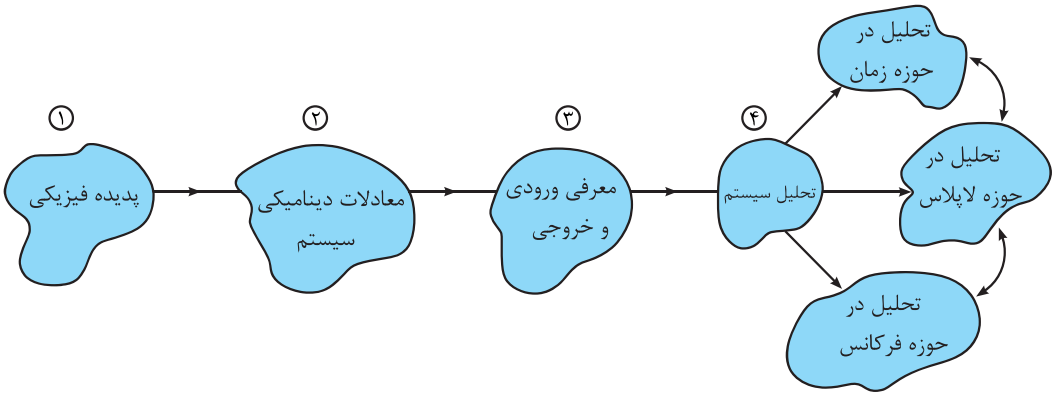
$\dot{x} = t^{۲}x + t \quad \longleftarrow$ معادله دیفرانسیل با زمان تغییر می‌کند.

۳ از ۴ سیستم علی است (causal system): خروجی به ورودی همان لحظه و لحظات قبل وابسته است و به ورودی لحظات بعد وابسته نمی‌باشد.

مثال ۲ سیستم $y(t) = Ax(t) + B$ علی است اما $y(t) = x(t^{۲})$ یا $y(t) = Ax(t+۱)$ غیرعلی هستند.

۴ از ۴ سیستم یک ورودی و یک خروجی است SISO (single input,single output)

در حالت کلی برای تحلیل یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان روند زیر را دنبال می‌کنیم.



انجام عملیات از مرحله (۱) به (۲) در فصل ۶ مورد بررسی قرار گرفته است.

در این‌جا فرض می‌کنیم همواره معادلات دینامیکی سیستم در اختیار است و هم‌چنین متغیرهای ورودی و خروجی در این معادلات مشخص شده است بنابراین بیشتر هدف تحلیل و بررسی سیستم است.

توجه:

از این‌جا به بعد سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان یک ورودی و یک خروجی را با نماد سیستم LTI (Linear time invariant) نمایش می‌دهیم.

تحلیل سیستم در حوزه زمان

در حالت کلی معادله سیستم به دو صورت در حوزه زمان داده می‌شود.

- معادله دیفرانسیل سیستم
- فضای حالت که در بخش دوم توضیح داده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم:

کلی‌ترین فرم معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی نامتغیر با زمان (LTI) مطابق زیر است:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_0 r(t)$$

شرایط اولیه سیستم
$$\begin{cases} y(0^-)=c_0 \\ y'(0^-)=c_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0^-)=c_{n-1} \end{cases}$$

n، $r(t)$ و $y(t)$ به ترتیب مرتبه سیستم، ورودی سیستم (که معلوم است) و خروجی سیستم هستند، که مطابق زیر می‌توان خروجی را بدست آورد.

$y(t)$	$=$	پاسخ ورودی صفر	$+$	پاسخ حالت صفر $=y_h+y_p$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
پاسخ عمومی (کامل)		ناشی از شرایط اولیه وقتی ورودی صفر است		ناشی از ورودی وقتی شرایط اولیه صفر است

توجه:

شرایط اولیه سیگنال ورودی را همواره صفر در نظر می‌گیریم جز آن‌که خلاف آن در صورت مسأله ذکر شده باشد.

توجه:

در این قسمت به دانشجویان توصیه می‌شود محاسبه جواب معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را از یک کتاب معادلات دیفرانسیل مطالعه نمایند.

به روش‌های مختلفی می‌توان معادله دیفرانسیل فوق را حل کرد. یکی از روش‌های مرسوم استفاده از تبدیل لاپلاس است. چون همواره توسط تبدیل لاپلاس یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل به یک معادله جبری می‌شود که عموماً محاسبه پاسخ آن ساده است. مطابق زیر:

یادآوری:

$$y^{(n)}\xrightarrow{\mathcal{L}}s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0)$$

$$a_n(s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0))+\cdots+a_1(sY(s)-y(0))+a_0Y(s)$$
$$=(b_ms^m+\cdots+b_0)R(s)$$
$$(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)+f(s,y(0),y'(0),\ldots,y^{(n-1)}(0))$$
$$=(b_ms^m+\cdots+b_0)R(s)$$

که در آن $f(s,y(0),y'(0),\ldots,y^{(n-1)}(0))$ تابعی است برحسب s و شرایط اولیه.

$$Y(s)=\underbrace{\frac{b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}R(s)}_{\text{پاسخ حالت صفر که ناشی از ورودی است و شرایط اولیه در آن تأثیری ندارد}}-\underbrace{\frac{f(s,y(0),\ldots,y^{(n-1)}(0))}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}}_{\text{پاسخ ورودی صفر که ناشی از شرایط اولیه است و ورودی در آن تأثیری ندارد}}$$

تعریف تابع تبدیل SISO

تبدیل لاپلاس خروجی سیستم $(Y(s))$ به تبدیل لاپلاس ورودی سیستم $(R(s))$ در صورتی‌که شرایط اولیه صفر باشند، مطابق زیر:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}\Big|_{y(0-)=y'(0-)=\cdots=y^{(n-1)}(0-)=0}=\frac{b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

توجه:

پاسخی که از تابع تبدیل سیستم حاصل می‌شود، پاسخ کامل نیست، بلکه پاسخ حالت صفر است. اگر بخواهیم پاسخ کامل داشته باشیم، باید پاسخ ورودی صفر را هم در نظر بگیریم. در تست زیر این موضوع پرسیده شده است.

توجه:

در مورد تابع تبدیل توجه به چند مطلب زیر مفید است.

۱ تابع تبدیل برای سیستم‌های LTI تعریف می‌شود.

۲ تابع تبدیل، خروجی سیستم را به ورودی آن مرتبط می‌سازد و هیچ اطلاعی در مورد ساختار سیستم نمی‌دهد به همین دلیل ممکن است دو سیستم کاملاً متفاوت تابع تبدیل یکسانی داشته باشند.

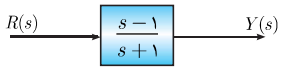
۳ تابع تبدیل را می‌توان به طور تجربی با اعمال ورودی‌های خاص و معلوم به سیستم و بررسی خروجی آن نیز تعیین کرد، به این کار شناسایی سیستم می‌گویند.

۴ تابع تبدیل همان پاسخ ضربه سیستم است زمانی که همه شرایط اولیه صفر باشند.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=G(s)\ ,\ \ r(t)=\delta(t)\Rightarrow R(s)=1\Rightarrow Y(s)=R(s)G(s)\Rightarrow Y(s)=G(s)$$

(مهندسی برق ۹۲)

در سیستم زیر تحت چه شرایطی $Y(s)=0$ است.



۱) $r(t)=e^{t}\ ,\ y(0^-)=1$

۲) $r(t)=e^{-t}\ ,\ y(0^-)=$ آزاد

۳) $r(t)=e^{t}\ ,\ y(0^-)=-1$

۴) $r(t)=e^{-t}\ ,\ y(0^-)=0$

حل: اگر فقط به پاسخ ناشی از تابع تبدیل توجه شود به جواب نمی‌رسیم. بنابراین مطابق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا از تابع تبدیل سیستم استفاده می‌کنیم تا معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بدست آوریم.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s-1}{s+1}\quad\Rightarrow\quad sY(s)+Y(s)=sR(s)-R(s)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dr(t)}{dt}-r(t)$$

حال که معادله دیفرانسیل سیستم مشخص شد پاسخ کامل آن را بدست می‌آوریم. کافی است از طرفین تبدیل لاپلاس بگیریم (با در نظر گرفتن شرایط اولیه).

$$sY(s)-y(0^-)+Y(s)=sR(s)-R(s)\Rightarrow(s+1)Y(s)=(s-1)R(s)+y(0^-)$$
$$Y(s)=0\Rightarrow(s-1)R(s)+y(0^-)=0\Rightarrow R(s)=\frac{-y(0^-)}{s-1}$$

از طرفین لاپلاس وارون می‌گیریم.

$$r(t)=-y(0^-)e^{t}$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

گزینه (۳) صحیح است. **********

توجه:

تابع تبدیل سیستم، نمایش کامل و جامعی از سیستم نیست. زیرا علاوه بر این‌که شرایط اولیه را در نظر نمی‌گیرد، ممکن است ریشه‌ای از صورت و مخرج تابع تبدیل حذف شود که این عامل باعث تغییر مرتبه‌ی سیستم و حتی ممکن است تابع تبدیل نشان دهد سیستم پایدار است در حالی‌که سیستم ناپایدار است. این موضوع به‌طور مفصل در صفحات بعدی توضیح داده شده است. محاسبه تابع تبدیل یکی از مطالب مهم در این درس به شمار می‌آید و عموماً پرسش‌های محاسبه تابع تبدیل در تقسیم‌بندی‌های زیر قرار می‌گیرند.

۱ سیستم فیزیکی داده می‌شود و تابع تبدیل آن را می‌خواهند. (در فصل ۶ توضیح داده می‌شود)

۲ معادلات دیفرانسیل سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در همین فصل توضیح داده می‌شود)

۳ بلوک دیاگرام سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در همین فصل توضیح داده می‌شود)

۴ نمودار گذر سیگنال سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در همین فصل توضیح داده می‌شود)

۵ فضای حالت داده می‌شود و تابع تبدیل خواسته می‌شود (در بخش دوم این فصل توضیح داده می‌شود)

۶ مرتبه و رفتارهای حالت گذرا و دائم سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در فصل سوم توضیح داده می‌شود)

۷ نمودار مکان ریشه سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در فصل چهارم توضیح داده می‌شود)

۸ نمودار بود داده می‌شود و تابع تبدیل را می‌خواهند. (در فصل پنجم بخش اول توضیح داده می‌شود)

۹ نمودار نایکوئیست سیستم داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در فصل پنجم بخش دوم توضیح داده می‌شود)

۱۰ نمودار نیکولز (اندازه فاز) داده می‌شود و تابع تبدیل سیستم را می‌خواهند. (در فصل پنجم بخش سوم توضیح داده می‌شود)

۱۱ گاهی اوقات هم با ترکیبی از موارد فوق روبرو می‌شویم که با اطلاعات بندهای قبلی می‌توان تابع تبدیل را بدست آورد.

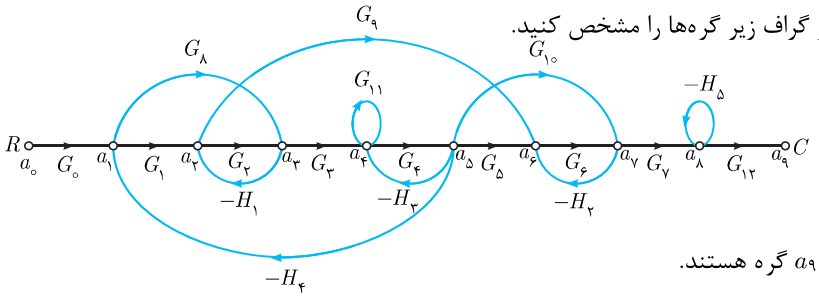
یکی از پر تکرارترین سؤالات در محاسبه تابع تبدیل، محاسبه تابع تبدیل به روش میسون (S.J.Mason) با استفاده از سیگنال گذر جریان (Signal flow graph) (نمودار گذر سیگنال، سیگنال فلوگراف، نمودار سیگنال جریان) (SFG) است که در این قسمت به آن می‌پردازیم.

سیگنال فلوگراف (سیگنال گذر جریان) (SFG)

در این بخش روش بدست آوردن تابع تبدیل سیستم از ساختار بلوکی یا سیگنال گذر جریان توضیح داده شده است. برای آشنایی با SFG ابتدا اجزای آن را معرفی می‌کنیم.

گره: هر گره نشان‌دهنده یک متغیر در سیستم است.

مثال ۳ در گراف زیر گره‌ها را مشخص کنید.

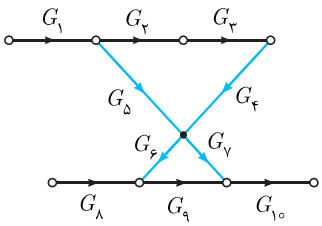


تمامی نقاط a_0 تا a_9 گره هستند.

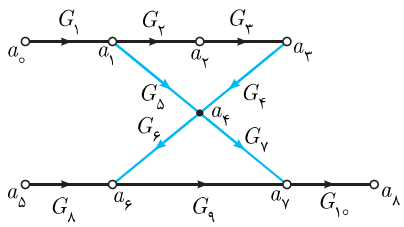
توجه:

گره‌ها همان نقاط اتصال شاخه‌ها می‌باشند. در مثال بالا گره a_0 به یک شاخه و گره a_1 به ۴ شاخه متصل است.

مثال ۴ اگر گراف به صورت مقابل باشد، گره‌ها را مشخص کنید.



حل: در شکل زیر گره‌ها با a_0 تا a_8 مشخص شده‌اند.

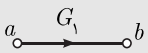


شاخه: یک پاره‌خط جهت‌دار که ارتباط بین گره‌ها (متغیرهای سیستم) را مشخص می‌کند.

بهره شاخه: بهره یا ضریبی که بوسیله شاخه از یک گره به گره دیگر منتقل می‌شود.

توجه:

هر شاخه فقط یک جهت دارد و دارای بهره است و به صورت ضرب در حوزه لاپلاس ظاهر می‌شود.



$$\Rightarrow b = aG_1 \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a} = G_1$$

مثال ۵ در گراف مثال ۳ و ۴ شاخه‌ها را مشخص کنید.

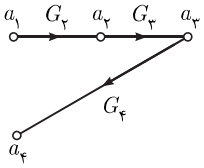
حل: در گراف مثال ۳ هر شاخه را با بهره‌اش معرفی می‌کنیم.

$$G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, -H_1, -H_2, -H_3, -H_4, -H_5$$

در گراف مثال ۴ نیز شاخه‌ها به صورت زیر هستند.

$$G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$$

توجه کنید در مثال چهارم



سه شاخه به حساب می‌آید.

مسیر: پیمایش بین دو گره دلخواه SFG در جهت شاخه‌ها بطوری‌که از هر گره فقط یک‌بار عبور کنیم.

مثال ۶ در مثال ۳ به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

۱- مسیرهای بین گره‌های a_2 و a_5 را مشخص کنید.

حل: $G_2G_3G_4$

۲- مسیرهای بین گره‌های a_2 و a_7 را مشخص کنید.

حل: $G_2G_3G_4G_5G_6, G_9G_6, G_2G_3G_4G_{10}$

توجه کنید، موارد زیر مسیر نمی‌باشند:

$G_2(-H_1)G_9G_6$ زیرا از گره a_2 دوبار عبور می‌کنیم.

$G_2G_3G_{11}G_4G_5G_6$ زیرا از گره a_4 دوبار عبور می‌کنیم.

۳- مسیرهای بین گره a_0 و a_9 را بدست آورید.

حل: $G_0G_8G_3G_4G_5G_6G_7G_{12}$ و $G_0G_1G_2G_3G_4G_5G_6G_7G_{12}$ و $G_0G_1G_2G_3G_4G_{10}G_7G_{12}$

و $G_0G_1G_9G_6G_7G_{12}$ و $G_0G_8(-H_1)G_9G_6G_7G_{12}$ و $G_0G_8G_3G_4G_{10}G_7G_{12}$

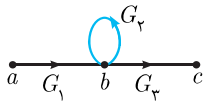
توجه:

$G_0G_8G_3G_4(-H_4)G_1G_9G_6G_7G_{12}$ مسیر نیست زیرا از گره a_1 دوبار عبور می‌کنیم.

حلقه: مسیر بسته‌ای از گره‌ها و شاخه‌های موجود در SFG که تنها یک‌بار از آن‌ها در جهت شاخه‌ها عبور کرده باشیم. به عبارت دیگر مسیری که از یک گره شروع کنیم و دوباره به همان گره برگردیم.

حلقه سوده: حلقه‌ای است که یک گره را به خودش متصل می‌کند.

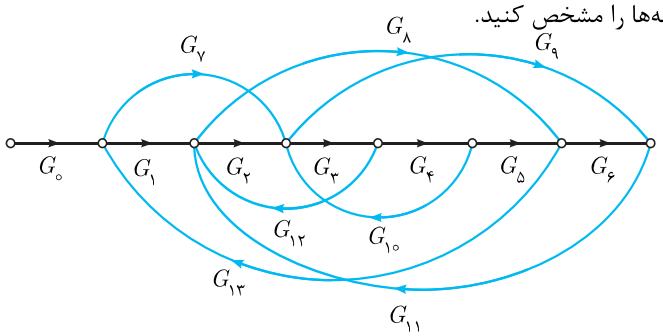
مثال شکل زیر یک حلقه سوده دارد.



مثال ۷ در مثال ۳ حلقه‌ها را مشخص کنید.

$G_2(-H_1), G_4(-H_3), G_6(-H_2), G_{11}, (-H_5), G_1G_2G_3G_4(-H_4), G_8G_3G_4(-H_4)$

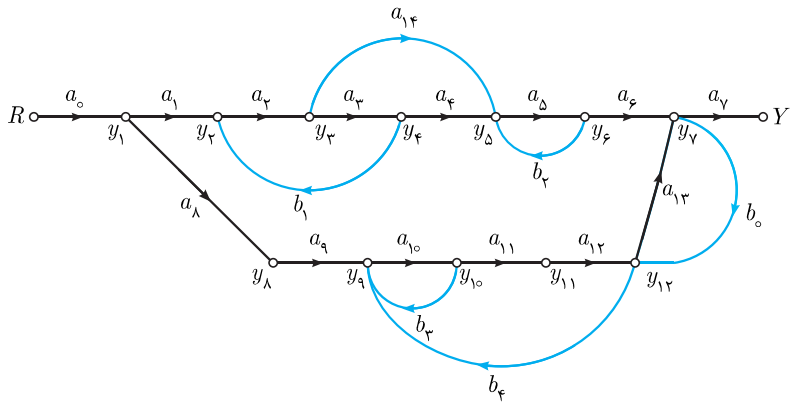
مثال ۸ در گراف زیر حلقه‌ها را مشخص کنید.



حل: $G_2G_3G_{12}$ و $G_3G_4G_{10}$ و $G_2G_3G_4G_5G_6G_{11}$ و $G_1G_2G_3G_4G_5G_{13}$ و $G_1G_8G_{13}$ و $G_7G_3G_4G_5G_{13}$ و $G_8G_6G_{11}$ و $G_7G_3G_{12}G_8G_{13}$ و $G_2G_9G_{11}$ و $G_9G_{11}G_8G_{13}G_7$

حلقه مستقل از مسیر: حلقه‌ای که هیچ اشتراکی از لحاظ گره یا شاخه با مسیر در نظر گرفته شده نداشته باشد. به عبارت دیگر بعد از حذف مسیر حلقه‌های باقی‌مانده را مستقل از مسیر می‌نامند.

مثال ۹ در گراف زیر حلقه‌های مستقل از مسیرهای مشخص شده را پیدا کنید.



الف) حلقه‌های مستقل از مسیر $a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ را بدست آورید.

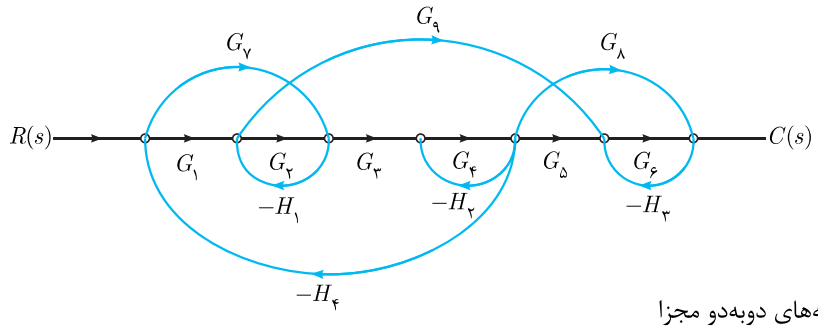
ب) حلقه‌های مستقل از مسیر $a_0a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_7$ را بدست آورید.

حل: الف) اگر مسیر را حذف کنیم فقط حلقه‌های $a_{10}b_3$ و $a_{10}a_{11}a_{12}b_4$ باقی می‌مانند.

ب) اگر مسیر داده شده را حذف کنیم فقط حلقه‌های a_5b_2 و $a_2a_3b_1$ باقی می‌مانند.

حلقه‌های مستقل از هم: حلقه‌هایی که هیچ گره مشترکی با هم نداشته باشند.

مثال ۱۰ در گراف زیر حلقه‌های مستقل را مشخص کنید.



حل: حلقه‌های دوبه‌دو مجزا

$\{G_2(-H_1), G_4(-H_2)\}, \{G_2(-H_1), G_6(-H_3)\}, \{G_4(-H_2), G_6(-H_3)\}$

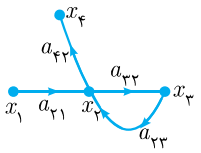
$\{G_1G_2G_3G_4(-H_4), G_6(-H_3)\}, \{G_7G_3G_4(-H_4), G_6(-H_3)\}$

حلقه‌های سه‌به‌سه مجزا

$$\{G_۲(-H_۱), G_۴(-H_۲), G_۶(-H_۳)\}$$

حلقه چهار به چهار مجزا و بالاتر نداریم.

مثال ۱۱ بین دو گره $x_۱$ و $x_۴$ چند مسیر وجود دارد؟



پاسخ: فقط یک مسیر $a_{۲۱}a_{۴۲}$ است.

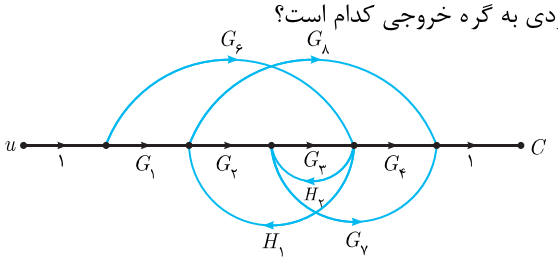
توجه شود $a_{۲۱}a_{۳۲}a_{۲۳}a_{۴۲}$ مسیر نیست. (چرا؟)

بهره مسیر: حاصل‌ضرب بهره‌های موجود روی شاخه‌های یک مسیر

مسیر پیشرو: به مسیر میان گره ورودی و گره خروجی مسیر پیشرو می‌گویند.

(مهندسی هسته‌ای ۸۱)

در گراف زیر تعداد مسیرهای مستقیم از گره ورودی به گره خروجی کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

حل: مسیرهای مستقیم از گره ورودی به گره خروجی در گراف داده شده به صورت زیر است:

$$P_۱ = ۱G_۱G_۲G_۳G_۴۱, P_۲ = ۱G_۱G_۸۱, P_۳ = ۱G_۶G_۴۱, P_۴ = ۱G_۱G_۲G_۷۱$$

$$P_۵ = ۱G_۶H_۱G_۸۱, P_۶ = ۱G_۶H_۲G_۷۱, P_۷ = ۱G_۶H_۱G_۲G_۷۱$$

توجه کنید که $۱G_۶H_۲G_۳G_۴۱$ مسیر پیشرو نیست.

گزینه (۴) صحیح است. **********

بهره حلقه: حاصل‌ضرب بهره‌های موجود روی شاخه‌های یک حلقه.

توجه:

اگر برای شاخه‌ای بهره‌ای در نظر گرفته نشد، به طور پیش‌فرض بهره آن شاخه برابر با یک است.

توجه:

شاخه به صورت $x \xrightarrow{۱} y$ را نمی‌توان با $x \xleftarrow{-۱} y$ معادل سازی کرد. هم‌چنین دو گره که با بهره یک به هم متصل شده‌اند $x \xrightarrow{۱} y$ را نمی‌توان به یک گره x یا y تبدیل کرد.

توجه: در محاسبه تابع تبدیل حلقه‌های سوده را فراموش نکنید.

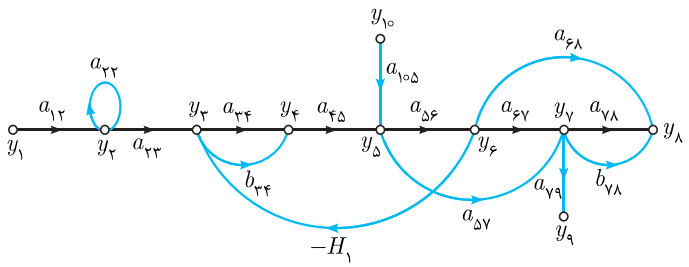
قانون جمع گره‌های SFG

گره ورودی: گره‌ای که تمام شاخه‌های متصل به آن خارج شونده باشند.

گره خروجی: گره‌ای که تمام شاخه‌های متصل به آن وارد شونده باشند.

گره مخلوط: گره‌ای که نه ورودی است و نه خروجی را گره مخلوط می‌نامند.

مثال ۱۲ در گراف زیر گره‌های ورودی، خروجی و مخلوط را مشخص کنید.



حل: گره y_1 و y_{10} گره‌های ورودی هستند چون تمام شاخه‌ها از این گره‌ها خارج می‌شوند. گره y_9 و y_8 گره خروجی هستند چون تمام شاخه‌ها به این گره‌ها وارد می‌شوند. گره‌های y_2، y_3، y_4، y_5، y_6 و y_7 گره‌های مخلوط هستند چون هم شاخه ورودی دارند و هم شاخه خروجی.

قانون جمع در گره‌ها: به عبارت $a_{ij}y_i$ یک سیگنال می‌گوییم که عبارت است از بهره شاخه ضرب در گره‌ای که شاخه از آن خارج می‌شود.

$$y_j = \sum a_{ij}y_i$$

متغیر اختصاص داده شده به گره j ام = مجموع سیگنال‌های ورودی به گره j ام (سیگنال‌های دریافتی در گره j ام)

این قانون را برای گره‌های $y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8$ در مثال فوق می‌نویسیم.

$$y_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2$$

$$y_3 = a_{23}y_2 + (-H_1)y_6$$

(توجه شود شاخه a_{22} هم وارد شونده است و هم خارج شونده، بنابراین باید در نظر گرفته شود.)

توجه:

در نوشتن قانون جمع گره‌ها فقط شاخه‌های ورودی (سیگنال‌های دریافتی) در نظر گرفته می‌شوند و شاخه خروجی هر چند تا باشند، اهمیتی ندارد.

$$y_4 = a_{34}y_3 + b_{34}y_3$$

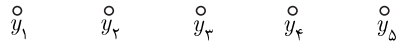
$$y_5 = a_{45}y_4 + a_{105}y_{10} \quad \text{و} \quad y_6 = a_{56}y_5$$

$$y_7 = a_{67}y_6 + a_{57}y_5 \quad \text{و} \quad y_8 = a_{68}y_6 + a_{78}y_7 + b_{78}y_7$$

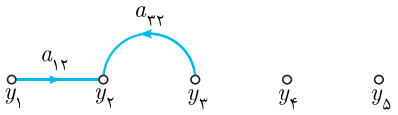
مثال ۱۳ اگر گرافی شامل ۵ گره باشد و قانون جمع در گره‌ها به صورت زیر باشد، گراف را رسم کنید.

$$\begin{cases} y_۲ = a_{۱۲}y_۱ + a_{۳۲}y_۳ \\ y_۳ = a_{۲۳}y_۲ + a_{۴۳}y_۴ \\ y_۴ = a_{۲۴}y_۲ + a_{۳۴}y_۳ + a_{۴۴}y_۴ \\ y_۵ = a_{۲۵}y_۲ + a_{۴۵}y_۴ \end{cases}$$

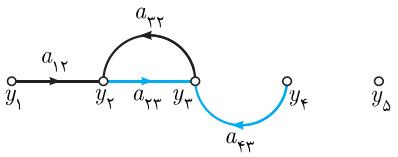
حل: ابتدا گره‌های $y_۱$، $y_۲$ تا $y_۵$ را رسم می‌کنیم.



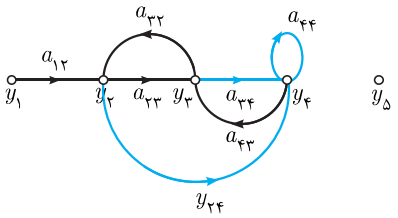
سپس $y_۲$ را رسم می‌کنیم.



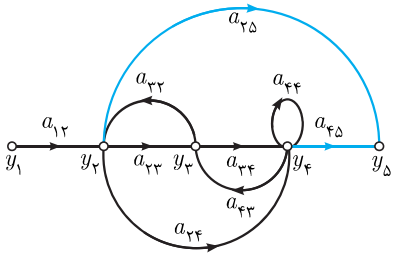
سپس $y_۳$ را رسم می‌کنیم.



سپس $y_۴$ را رسم می‌کنیم.



سپس $y_۵$ را رسم می‌کنیم.



توجه:

در گراف $y_k \xrightarrow{a_{kj}} y_j$ داریم: $y_j = a_{kj}y_k$ که در آن y_j گره خروجی، y_k گره ورودی و a_{kj} بهره (Transmittance) است.

توجه کنید هر چند از نظر ریاضی می‌توان نوشت $y_k = \frac{y_j}{a_{kj}}$، ولی از نظر گراف این رابطه غلط است و ما اجازه نداریم جهت‌ها را در گراف عوض کنیم.

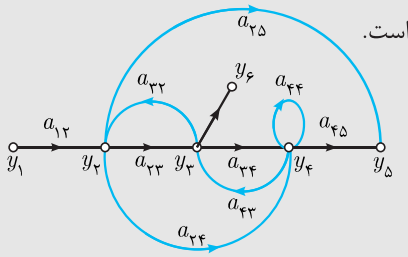
به عبارت دیگر سیگنال که از طریق یک شاخه بین y_k و y_j مسیر را طی می‌کند در بهره شاخه یعنی a_{kj} ضرب می‌شود لذا سیگنال $a_{kj}y_k$ در گره y_j دریافت می‌شود.

توجه:

هر گره SFG می‌تواند گره خروجی فرض شود.

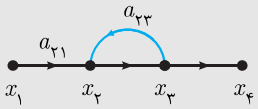
توجه:

ما نمی‌توانیم در حالت کلی در ساختار SFG تغییری ایجاد کنیم. جز آن‌که مطمئن باشیم این تغییر در معادلات دیفرانسیل سیستم تغییری ایجاد نمی‌کند. اگر از هر گره ما یک شاخه با بهره یک به صورت خارج شونده از آن گره در نظر بگیریم گره مدنظر به گره خروجی تبدیل می‌شود، زیرا شاخه‌های خروجی تغییری در معادلات گره ایجاد نمی‌کنند. به عنوان مثال اگر در مثال قبل بخواهیم $y_۳$ یک گره خروجی شود کافی است یک شاخه با بهره یک مطابق زیر به آن اضافه کنیم همان‌طور که گفتیم معادلات گره $y_۳$ تغییری نمی‌کند و هم‌چنین $y_۶ = y_۳$ است.

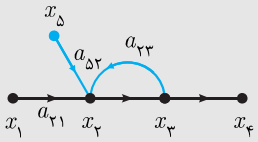


توجه:

هر گره‌ای نمی‌تواند به عنوان گره ورودی باشد زیرا اگر یک شاخه با بهره یک به عنوان ورودی اضافه کنیم طبق قانون جمع گره‌ها معادله مربوط به آن گره تغییر می‌کند. مطابق زیر:



$$\Rightarrow x_۲ = a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۳}x_۳$$

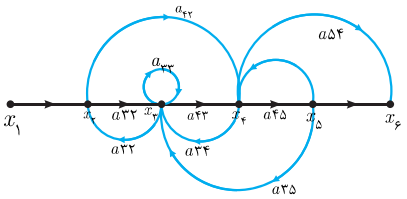


$$\Rightarrow x_۲ = a_{۲۱}x_۱ + a_{۵۲}x_۵ + a_{۲۳}x_۳$$

توجه:

SFG فقط برای سیستم‌های خطی کاربرد دارد.

مثال ۱۴ برای گراف زیر $x_۳$ را بنویسید.

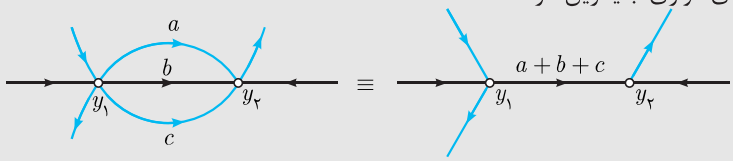


$$x_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5$$

توجه شود، به شاخه‌هایی که خارج می‌شوند کاری نداریم اما شاخه a_{33} هم خارج شونده و هم وارد شونده است. بنابراین برای x_3 در گروه شاخه‌های وارد شونده باید در نظر گرفته شود.

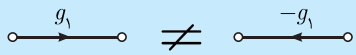
توجه:

می‌توان شاخه‌های موازی هم‌جهت که دو گره را به هم متصل می‌کنند با یک شاخه با بهره‌ای برابر مجموع بهره شاخه‌های موازی جایگزین کرد.



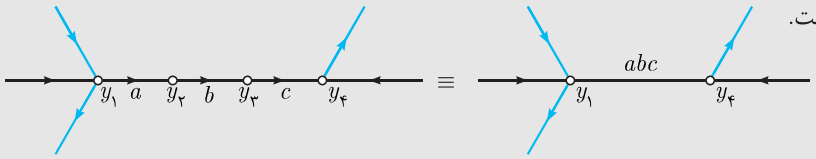
توجه:

اگر شاخه‌ها موازی و جهت‌ها یکسان نباشند از این قاعده نمی‌توان استفاده کرد. همان‌طور که قبلاً گفته شد در SFG نمی‌توان جهت را با منفی کردن بهره عوض کرد یعنی



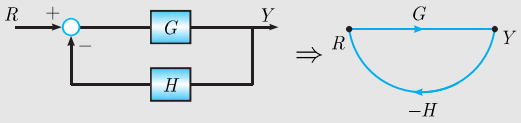
توجه:

اتصال سری چند شاخه هم‌جهت را می‌توان معادل یک شاخه در نظر گرفت که بهره آن‌ها در هم ضرب شده است.



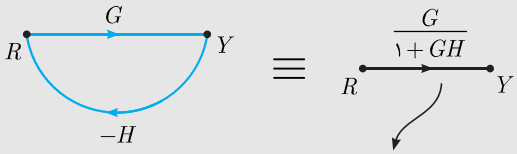
توجه:

گراف زیر که معادل یک سیستم حلقه بسته است و در فصل بعد به ویژگی‌های آن پرداخته می‌شود، به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = G\ ,\ \Delta_1 = 1 \\ \Delta_{total} = 1 + GH \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{G}{1+GH} \Rightarrow$$



جهت همان جهت مسیر پیشرو است

روش میسون برای محاسبه تابع تبدیل

برای بدست آوردن تابع تبدیل از روی سیگنال فلوگراف از روش میسون استفاده می‌کنیم. روش‌های دیگری علاوه بر میسون وجود دارد اما این روش کمترین حجم محاسبات و کمترین پیچیدگی را دارد.

تابع تبدیل سیستم داده شده را به صورت $T(s) = \frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$ در نظر می‌گیریم که نحوه محاسبه صورت و مخرج کسر در زیر توضیح داده شده است.

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{\text{گره خروجی}}{\text{گره ورودی}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta_{total}}$$

n: تعداد مسیرهای پیشرو بین Y و R

P_i: بهره مسیر پیشرو i ام بین Y و R

$$\Delta = \Delta_{total} = 1 - \sum(\text{بهره حلقه‌ها}) + \sum(\text{حاصل‌ضرب بهره حلقه‌های دوبه‌دو مستقل از هم}) - \sum(\text{حاصل‌ضرب بهره تمام حلقه‌های سه‌به‌سه مستقل از هم}) + \sum \cdots$$

دقت شود که مخرج تابع تبدیل در این روش به مسیر پیشرو ارتباطی ندارد.

Δ_i: Δ متعلق به مسیر i ام، یعنی تمام شاخه‌های مربوط به مسیر i ام را حذف می‌کنیم و سپس Δ_{total} را برای گراف باقی‌مانده می‌نویسیم که همان Δ_i است. توجه شود در مسیر i ام به هر گره‌ای که می‌رسیم تمام شاخه‌های متصل به آن حذف می‌شوند.

در مورد Δ_{total} توجه به چند مطلب زیر مفید است:

۱. Δ_{total} به خروجی و ورودی سیستم ربط ندارد یعنی فقط به ساختار گراف مربوط است و این‌که کدام گره خروجی و کدام گره ورودی است تأثیری در آن ندارد.

۲. Δ_{total} را معادله مشخصه یا دترمینان گراف نیز می‌نامند.

۳. ریشه‌های معادله $\Delta_{total} = 0$ را قطب‌های سیستم می‌نامند.

۴. ریشه‌های معادله $\Delta_{total} = 0$ را مقادیر ویژه سیستم می‌نامند.

۵. دو گراف با ورودی‌های یکسان معادل هستند اگر و فقط اگر Δ_{total} آن‌ها یکسان باشد.

توجه:

در سیستم‌های چند ورودی برای محاسبه تابع تبدیل سیستم باید از خاصیت جمع آثار استفاده کرد. یعنی تابع تبدیل از یک ورودی به خروجی مدنظر را با صفر قرار دادن سایر ورودی‌ها بدست آوریم و در نهایت با جمع کردن توابع تبدیل بدست آمده از هر ورودی تابع تبدیل کلی سیستم را محاسبه کنیم.

روش محاسبه تابع تبدیل با استفاده از فرمول میسون:

گام ۱: مشخص کردن گره خروجی و ورودی که می‌خواهیم تابع تبدیل بین آن دو گره را بدست آوریم یعنی

$$T = \frac{\text{گره خروجی}}{\text{گره ورودی}} = \frac{Y}{R}$$

گام ۲: تمام مسیرهای پیشرو از Y به R را مشخص می‌کنیم و بهره آن‌ها را می‌نویسیم.

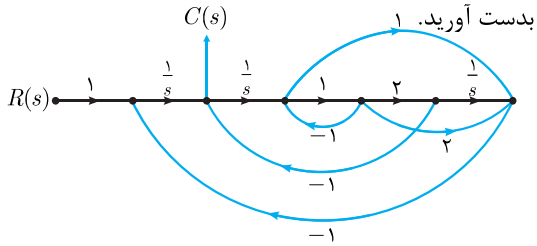
بهره مسیر پیشرو i ام که با حاصل‌ضرب بهره تمام شاخه‌های روی مسیر i ام آن را مشخص می‌کنیم $P_i =$

و برای هر مسیر P_i، Δ_i متناظر آن را می‌نویسیم.

گام ۳: Δ کلی را می‌نویسیم، بدین منظور ابتدا تمامی حلقه‌ها (L_i) را مشخص می‌کنیم سپس حلقه‌های دوبه‌دو مجزا، سه‌به‌سه مجزا و همین‌طور تا آخر را مشخص می‌نماییم، نهایتاً با استفاده از فرمول داده شده Δ_{total} را می‌نویسیم.

گام ۴: جایگذاری در فرمول میسون.

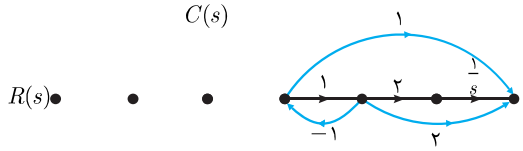
مثال ۱۵ تابع تبدیل از $C(s)$ به $R(s)$ را بدست آورید.



حل: گام ۱: گره ورودی و خروجی در شکل به ترتیب با R و C مشخص شده‌اند.

گام ۲: مسیرهای پیشرو و Δ_i ها

$$P_۱ = ۱ \times \frac{۱}{s} \times ۱ \quad , \quad \Delta_۱ = ۱ - (-۱) = ۲$$



گام ۳: حلقه‌ها

$$L_۱ = \frac{۱}{s} \times \frac{۱}{s} \times ۱ \times ۲ \times \frac{۱}{s} \times -۱ = \frac{-۲}{s^۳} \qquad L_۲ = \frac{۱}{s} \times ۱ \times ۲ \times -۱ = \frac{-۲}{s}$$

$$L_۳ = ۱ \times -۱ = -۱ \qquad L_۴ = \frac{۱}{s} \times \frac{۱}{s} \times ۱ \times ۲ \times -۱ = \frac{-۲}{s^۲}$$

$$L_۵ = \frac{۱}{s} \times \frac{۱}{s} \times ۱ \times -۱ = \frac{-۱}{s^۲}$$

حلقه دوبه‌دو مجزا نداریم.

گام ۴: تابع تبدیل سیستم برابر است با:

$$T(s) = \frac{\frac{۲}{s}}{۱ - \left(-\frac{۲}{s^۳} - \frac{۲}{s} - ۱ - \frac{۲}{s^۲} - \frac{۱}{s^۲}\right)}$$